



ANALIZA DINAMICĂ A SOLIDULUI RIGID CU SIMETRII STRUCTURALE – STUDIU DE CAZ: ANALIZA MODURILOR PROPRII ALE PODURILOR DIN BETON ARMAT

Autori: Ionel ALBU¹, Anul I A.A.C.

Marin ȘERBAN², Anul: II I.S.

Îndrumător științific: Conf. dr. ing. Nicușor POPESCU³

Facultatea de Inginerie și Agronomie din Brăila, Universitatea „Dunărea de Jos din Galați”

¹ionelalbu@ugal.ro, ²marinserban@ugal.ro, ³npopescu@ugal.ro

Rezumat: Articolul propune o abordare a dinamicii modelului solidului rigid cu două tipuri de simetrii structurale și de rezemare. Aceste simetrii conduc la obținerea unor modele matematice mai simple, cu ecuații diferențiale decuplate care pot fi rezolvate mai ușor pe cale analitică. Dacă solidul rigid este rezemat prin intermediul a patru legături elastice, modelul matematic devine și mai simplu iar vibrațiile sistemului se decuplează în patru subsisteme cu mișcări cuplate.

Cuvinte cheie: analiză dinamică, simetrii structurale, vibrații decuplate, valori proprii, vectori proprii

1. INTRODUCERE

Sistemul ecuațiilor diferențiale de mișcare ale solidului rigid cu legături vâsco-elastice are șase ecuații cuplate elastic și vâscos [1] [2] [3] [5]. Sub formă matricială acest sistem se scrie:

$$\underline{A}\ddot{\underline{q}} + \underline{B}\dot{\underline{q}} + \underline{C}\underline{q} = \underline{f} \quad (1)$$

Dacă se consideră că legăturile rigidului sunt elastice sau cu amortizări mici, ecuațiile de mișcare se simplifică prin anularea amortizărilor. În această ipoteză, sistemul ecuațiilor diferențiale de mișcare devine:

$$\underline{A}\ddot{\underline{q}} + \underline{C}\underline{q} = \underline{f} \quad (2)$$

Pentru determinarea modurilor proprii de vibrație se consideră solidul rigid neperturbat; în formalism matricial ecuația diferențială de mișcare (cu coeficienți matriciali) este de forma:

$$\underline{A}\ddot{\underline{q}} + \underline{C}\underline{q} = \underline{0} \quad (3)$$

Dacă se consideră un sistem de axe central și principal, matricea de inerție devine diagonală, sistemul de ecuații diferențiale de mișcare rămânând cuplat elastic dar rămâne cuplat inerțial. În acest caz, matricea de inerție este:

$$\underline{A} = \text{DIAG}[m, m, m, J_x, J_y, J_z] \quad (4)$$

unde m este masa rigidului iar J_x , J_y și J_z sunt momentele de inerție principale.

2. DECUPLAREA VIBRAȚIILOR SOLIDULUI RIGID CU SIMETRII STRUCTURALE. MODURI PROPRII.

Se consideră un rigid cu axa verticală Cz de simetrie. Simetria rigidului constă în simetria de distribuție masică, simetria dimensională și simetria legăturilor. Considerând că rigidul are n legături triortogonale elastice în punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $i = \overline{1, n}$ de constante (k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}) $i = \overline{1, n}$, matricea de rigiditate devine:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \sum k_{ix} & 0 & 0 & 0 & \sum k_{ix}z_i & 0 \\ 0 & \sum k_{iy} & 0 & -\sum k_{iy}z_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum k_{iz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sum k_{iy}z_i & 0 & \sum (k_{iy}z_i^2 + k_{iz}y_i^2) & 0 & 0 \\ \sum k_{ix}z_i & 0 & 0 & 0 & \sum (k_{iz}x_i^2 + k_{ix}z_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum (k_{ix}y_i^2 + k_{iy}x_i^2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Luând în considerare că sistemul de axe este central și principal, cuplarea mișcărilor se face numai elastic (prin intermediul coeficienților nediagonali nenuli) în patru subsisteme.

2.1. Ecuațiile diferențiale de mișcare

Ecuațiile diferențiale de mișcare pentru vibrațiile cuplate ale subsistemelor sunt următoarele:

a) pentru alunecarea laterală cuplată cu mișcarea de ruluu - subsistemul (X, φ_y)

$$\begin{cases} m\ddot{X} + X\sum k_{ix} + \varphi_y\sum k_{ix}z_i = 0 \\ J_y\ddot{\varphi}_y + X\sum k_{ix}z_i + \varphi_y\sum (k_{iz}x_i^2 + k_{ix}z_i^2) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

b) pentru mișcarea de avans axial cuplată cu mișcarea de tangaj - subsistemul (Y, φ_x)

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + Y\sum k_{iy} - \varphi_x\sum k_{iy}z_i = 0 \\ J_x\ddot{\varphi}_x - Y\sum k_{iy}z_i + \varphi_x\sum (k_{iy}z_i^2 + k_{iz}y_i^2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

c) pentru mișcarea de săltare - subsistemul (Z)

$$m\ddot{Z} + Z\sum k_{iz} = 0 \quad (8)$$

d) pentru mișcarea de întoarcere (girație) - subsistemul (φ_z)

$$J_z\ddot{\varphi}_z + \varphi_z\sum (k_{ix}y_i^2 + k_{iy}x_i^2) = 0 \quad (9)$$

2.2. Pulsații proprii. Coeficienți de cuplaj dinamic

Expresiile pulsațiilor proprii ale vibrațiilor libere necuplate sunt următoarele:

a) pentru alunecarea laterală (X)

$$p_X = \sqrt{\frac{\sum k_{ix}}{m}} \quad (10)$$

b) pentru mișcarea de avans axial (Y)

$$p_Y = \sqrt{\frac{\sum k_{iy}}{m}} \quad (11)$$

c) pentru mișcarea de săltare (Z)

$$p_Z = \sqrt{\frac{\sum k_{iz}}{m}} \quad (12)$$

d) pentru mișcarea de tangaj (φ_x)

$$p_{\varphi_x} = \sqrt{\frac{\sum (k_{iy} z_i^2 + k_{iz} y_i^2)}{J_x}} \quad (13)$$

e) pentru mișcarea de ruluu (φ_y)

$$p_{\varphi_y} = \sqrt{\frac{\sum (k_{iz} x_i^2 + k_{ix} z_i^2)}{J_y}} \quad (14)$$

f) pentru mișcarea de girație (φ_z)

$$p_{\varphi_z} = \sqrt{\frac{\sum (k_{ix} y_i^2 + k_{iy} x_i^2)}{J_z}} \quad (15)$$

Expresiile analitice ale coeficienților de cuplaj dinamic sunt următoarele:

a) pentru alunecarea laterală cuplată cu mișcarea de ruluu - subsistemul (X, φ_y)

$$\alpha_1 = \frac{I}{m} \sum k_{ix} z_i \quad \alpha_2 = \frac{I}{J_y} \sum k_{ix} z_i \quad (16)$$

b) pentru mișcarea de avans axial cuplată cu mișcarea de tangaj - subsistemul (Y, φ_x)

$$\beta_1 = -\frac{I}{m} \sum k_{iy} z_i \quad \beta_2 = -\frac{I}{J_x} \sum k_{iy} z_i \quad (17)$$

Cu notațiile date de relațiile (10)-(17), modurile proprii (pulsatii proprii, coeficienți de distribuție) ale subsistemelor cu mișcări cuplate sunt după cum urmează:

■ pentru subsistemul (X, φ_y)

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{I}{2} \left[p_X^2 + p_{\varphi_y}^2 \mp \sqrt{\left(p_X^2 - p_{\varphi_y}^2 \right)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right]} \quad (18)$$

$$\mu_{1,2} = -\frac{I}{2\alpha_1} \left[p_X^2 + p_{\varphi_y}^2 \pm \sqrt{\left(p_X^2 - p_{\varphi_y}^2 \right)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right] \quad (19)$$

■ pentru subsistemul (Y, φ_x)

$$p_{3,4} = \sqrt{\frac{I}{2} \left[p_Y^2 + p_{\varphi_x}^2 \mp \sqrt{\left(p_Y^2 - p_{\varphi_x}^2 \right)^2 + 4\beta_1\beta_2} \right]} \quad (20)$$

$$\mu_{3,4} = -\frac{I}{2\beta_1} \left[p_Y^2 + p_{\varphi_x}^2 \pm \sqrt{\left(p_Y^2 - p_{\varphi_x}^2 \right)^2 + 4\beta_1\beta_2} \right] \quad (21)$$

3. STUDIU DE CAZ – MODURILOR PROPRII ALE UNUI POD DIN BETON ARMAT MODELAT CA UN SOLID RIGID CU SIMETRII STRUCTURALE ȘI REAZEME ELASTICE DIN CAUCIUC NEOPRENIC

Se consideră modelul simplificat din figura 1 pentru un pod modelat ca un rigid și realizat din 20 de grinzi din beton armat, rezemate fiecare pe câte 4 reazeme identice din cauciuc sintetic vulcanizat. Cele 20 de grinzi sunt grupate pe 4 rânduri (axa Cx) a câte 5 (axa Cy), solidarizarea acestora realizându-se prin intermediul unei suprabetonări.

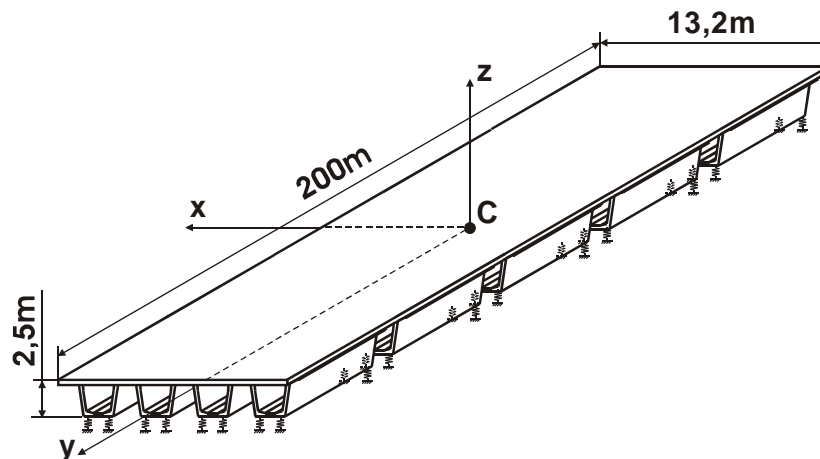


Figura 1. Modelul simplificat al podului realizat din 20 de grinzi din beton armat

Caracteristicile inerțiale ale podului și cele de elasticitate pentru reazemele din cauciuc neoprenic sunt următoarele:

■ Caracteristici inerțiale pod (calculate):

$$m = 4960000kg$$

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0 \text{ (datorită simetriilor)}$$

$$J_x = 16,025 \times 10^9 \text{ kgm}^2 \quad J_y = 73,270 \times 10^6 \text{ kgm}^2 \quad J_z = 16,092 \times 10^9 \text{ kgm}^2$$

■ Elasticități rezeme (determinate experimental):

$$k_{ix} \equiv k_x = 3,15 \times 10^6 \text{ N/m} \quad k_{iy} \equiv k_y = 3,15 \times 10^6 \text{ N/m} \quad k_{iz} \equiv k_z = 650 \times 10^6 \text{ N/m} \quad i = \overline{1,80}$$

■ Poziționare centru de masă C față de planul orizontal al rezemelor (calculat):

$$h = 1454,4 \text{ mm}$$

■ Poziționare aparate de rezem ([m] în sistemul de axe Cxyz) – conform tabel 1.

Tabel 1. Pozițiile rezemelor din cauciuc în sistemul de axe Cxyz

i	x _i	y _i	z _i	i	x _i	y _i	z _i	i	x _i	y _i	z _i	i	x _i	y _i	z _i
1	-5,5	-98,05	-1,45	21	1,1	-58,05	-1,45	41	-5,5	18,05	-1,45	61	1,1	58,05	-1,45
2	-4,4	-98,05	-1,45	22	2,2	-58,05	-1,45	42	-4,4	18,05	-1,45	62	2,2	58,05	-1,45
3	-2,2	-98,05	-1,45	23	4,4	-58,05	-1,45	43	-2,2	18,05	-1,45	63	4,4	58,05	-1,45
4	-1,1	-98,05	-1,45	24	5,5	-58,05	-1,45	44	-1,1	18,05	-1,45	64	5,5	58,05	-1,45
5	1,1	-98,05	-1,45	25	-5,5	-21,95	-1,45	45	1,1	18,05	-1,45	65	-5,5	61,95	-1,45
6	2,2	-98,05	-1,45	26	-4,4	-21,95	-1,45	46	2,2	18,05	-1,45	66	-4,4	61,95	-1,45
7	4,4	-98,05	-1,45	27	-2,2	-21,95	-1,45	47	4,4	18,05	-1,45	67	-2,2	61,95	-1,45
8	5,5	-98,05	-1,45	28	-1,1	-21,95	-1,45	48	5,5	18,05	-1,45	68	-1,1	61,95	-1,45
9	-5,5	-61,95	-1,45	29	1,1	-21,95	-1,45	49	-5,5	21,95	-1,45	69	1,1	61,95	-1,45
10	-4,4	-61,95	-1,45	30	2,2	-21,95	-1,45	50	-4,4	21,95	-1,45	70	2,2	61,95	-1,45
11	-2,2	-61,95	-1,45	31	4,4	-21,95	-1,45	51	-2,2	21,95	-1,45	71	4,4	61,95	-1,45
12	-1,1	-61,95	-1,45	32	5,5	-21,95	-1,45	52	-1,1	21,95	-1,45	72	5,5	61,95	-1,45
13	1,1	-61,95	-1,45	33	-5,5	-18,05	-1,45	53	1,1	21,95	-1,45	73	-5,5	98,05	-1,45
14	2,2	-61,95	-1,45	34	-4,4	-18,05	-1,45	54	2,2	21,95	-1,45	74	-4,4	98,05	-1,45
15	4,4	-61,95	-1,45	35	-2,2	-18,05	-1,45	55	4,4	21,95	-1,45	75	-2,2	98,05	-1,45
16	5,5	-61,95	-1,45	36	-1,1	-18,05	-1,45	56	5,5	21,95	-1,45	76	-1,1	98,05	-1,45
17	-5,5	-58,05	-1,45	37	1,1	-18,05	-1,45	57	-5,5	58,05	-1,45	77	1,1	98,05	-1,45
18	-4,4	-58,05	-1,45	38	2,2	-18,05	-1,45	58	-4,4	58,05	-1,45	78	2,2	98,05	-1,45
19	-2,2	-58,05	-1,45	39	4,4	-18,05	-1,45	59	-2,2	58,05	-1,45	79	4,4	98,05	-1,45
20	-1,1	-58,05	-1,45	40	5,5	18,05	-1,45	60	-1,1	58,05	-1,45	80	5,5	98,05	-1,45

Utilizând relațiile analitice de calcul din tabelul 1 (pentru pulsațiile vibrațiilor necuplate), tabelul 2 (pentru coeficienții de cuplaj dinamic) și cele date de relațiile (10)-(13), valorile numerice ale modurilor proprii de vibrație pentru podul modelat ca în figura 1 sunt date în tabelul 2.

Tabel 4. Pulsațiile/frecvențele proprii și coeficienții de distribuție pentru subsistemele cu vibrații cuplate

Subsistem	Pulsații	Frecvențe	Coeficienți de distribuție
(X, φ_y)	$p_1 = 7,13 \text{ rad/s}$	$f_1 = 1,13 \text{ Hz}$	$\mu_1 = 0,000509 \text{ rad/m}$
	$p_2 = 99,41 \text{ rad/s}$	$f_2 = 15,82 \text{ Hz}$	$\mu_2 = -133,055 \text{ rad/m}$
(Y, φ_x)	$p_3 = 7,13 \text{ rad/s}$	$f_3 = 1,13 \text{ Hz}$	$\mu_3 = -0,000002 \text{ rad/m}$
	$p_4 = 106,96 \text{ rad/s}$	$f_4 = 17,02 \text{ Hz}$	$\mu_4 = 154,145 \text{ rad/m}$
(Z)	$p_5 = p_Z = 103,39 \text{ rad/s}$	$f_5 = f_Z = 16,30 \text{ Hz}$	-
(φ_z)	$p_6 = p_{\varphi_z} = 7,44 \text{ rad/s}$	$f_6 = f_{\varphi_z} = 1,18 \text{ Hz}$	-

4. CONCLUZII

♦ modelarea unui solid rigid cu legături elastice sau vâsco-elastice cu diverse tipuri de simetrii conduce la obținerea unor sisteme de ecuații diferențiale de mișcare decuplate în subsisteme cu mai puțini coeficienți de cuplaj și, deci mai ușor de studiat analitic; în acest fel, pot fi puse în evidență

influențele factorilor dimensionali, inerțiali, elastici (eventual și a celor de amortizare) asupra formelor modurilor proprii de vibrație;

♦ dacă se poate modela solidul rigid cu simetrii astfel încât mișcările acestuia să se raporteze la un sistem de axe central și principal, atunci mișcările acestuia după cele șase “direcții” ($X, Y, Z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$) sunt cuplate numai prin intermediul coeficienților nediagonali ai matricii de rigiditate (eventual și prin intermediul amortizărilor dacă sunt semnificative);

♦ pentru studiul de caz considerat, se poate constata “gruparea” a trei dintre frecvențele proprii în zona $1,1 \div 1,2$ Hz, celelalte trei frecvențe fiind mult mai mari decât primele trei și grupate în intervalul $15,8 \div 17,1$ Hz; aceasta se poate explica numai prin diferența foarte mare dintre elasticitatea elementelor de rezemare pe verticală (efort de compresiune) față de elasticitățile în plan orizontal (solicitări de forfecare) – raportul constantelor de elasticitate este de circa **1 : 206** ;

♦ valorile sau foarte mari sau foarte mici ale coeficienților de distribuție conduce la concluzia că, în interiorul subsistemelor (X, φ_y) și (Y, φ_x), mișcările sunt de fapt foarte slab cuplate; în mod real, se poate considera că și mișcările acestor subsisteme sunt cvasi-decuplate, această decuplare putând fi observată și din valorile relativ foarte mici ale coeficienților de cuplaj $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ și β_2 .

BIBLIOGRAFIE

- [1] Bratu, P. - *Vibrațiile sistemelor elastice*, Editura Tehnică, București, 2000
- [2] Bratu, P., Drăgan, N. - *L'analyse dynamique de l'interaction machine-structure sur la base du modèle équivalent de rigide aux liaisons visco-elastiques*, Analele Universității „Dunărea de Jos” din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [3] Bratu, P., Drăgan, N. - *L'analyse des mouvements désaccouplés appliquée au modèle de solide rigide aux liaisons élastiques*, Analele Universității „Dunărea de Jos” din Galați, Fascicula XIV, 1997
- [4] Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeș, M. - *Vibrații mecanice*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [5] Drăgan, N. - *Contribuții la analiza și optimizarea procesului de transport prin vibrații - teză de doctorat*, Universitatea „Dunărea de Jos”, Galați, 2001